

CONSERVATIONS DES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES

IMAGES CONTINUES DIRECTES ET RÉCIPROQUES DES PARTIES REMARQUABLES

Nature de Ω	f est continue, $f(\Omega)$ et Ω sont-ils de même nature ?	f est continue, $f^{-1}(\Omega)$ et Ω sont-ils de même nature ?	Si $\forall \Omega$, $f(\Omega)$ et Ω sont de même nature f est-elle continue ?	Si $\forall \Omega$, $f^{-1}(\Omega)$ et Ω sont de même nature f est-elle continue ?
ouvert	non	oui	non	oui
fermé	non	oui	non	oui
compact	oui	non	non	non
connexe	oui	non	non	non
convexe	non	non	non	non
complet	non	non	non	non

CONSERVATION PAR PASSAGE À L'INTERSECTION, À LA RÉUNION, AU PRODUIT, À L'ADHÉRENCE, À L'INTÉRIEUR ET À LA SOMME

Nature	intersection finie	intersection quelconque	union finie	union quelconque	produit fini	adhérence	intérieur	somme
ouvert	oui	non	oui	oui	oui	non	oui	oui
fermé	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	non
compact	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
connexe	non	non	non	non	oui	oui	non	oui
convexe	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	oui
complet	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	non
s.e.v d'un e.v.n	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	oui

CONTRE-EXEMPLES

Contre-exemple 1. *Image non ouverte d'un ouvert par une fonction continue.*

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ alors f est continue comme fonction constante et $f^{-1}([0, 1]) = \{0\}$ qui est un fermé.

Contre-exemple 2. *Image non fermée d'un fermé par une fonction continue.*

La fonction arctan est définie et continue sur \mathbb{R} et \mathbb{R} est un fermé, or $\arctan(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ qui n'est pas fermé.

Contre-exemple 3. *Image non convexe d'un convexe par une application continue.*

On considère l'application f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(\theta) = e^{i\theta}$.
 f est une application continue de $[0, 2\pi[$ sur l'ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.
 $[0, 2\pi[$ est un intervalle de \mathbb{R} c'est donc une partie convexe de \mathbb{R} .
Or l'ensemble \mathbb{U} n'est pas convexe, le segment $[-1, 1]$ n'étant pas contenu dans \mathbb{U} .

Contre-exemple 4. *Image non complète d'un complet par une application continue.*

La fonction arctan est définie et continue sur \mathbb{R} et \mathbb{R} est complet, or $\arctan(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ n'étant pas fermé n'est pas complet.

Contre-exemple 5. *Image réciproque non compacte d'un compact par une application continue.*

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ est continue comme fonction constante et, $\{0\}$ est une partie compacte de \mathbb{R} , or $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ n'est pas compacte.

Contre-exemple 6. *Image réciproque non connexe d'un connexe par une application continue.*

Soit la fonction continue f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
 $[1, 4]$ est une partie connexe de \mathbb{R} et $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.
Or $[-2, -1] \cup [1, 2]$ n'est pas un intervalle, ce n'est donc pas une partie connexe de \mathbb{R} .

Contre-exemple 7. *Image réciproque d'une partie convexe par une application continue qui n'est pas convexe.*

Idem que le précédent, puisque l'intervalle $[1, 4]$ est convexe alors que $[-2, -1] \cup [1, 2]$ n'est pas un intervalle et n'est donc pas une partie convexe de \mathbb{R} .

Contre-exemple 8. *Image réciproque non complète d'une partie complète par une application continue*

Prenons comme fonction f la fonction tangente définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 $f^{-1}(\mathbb{R}) = \arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, \mathbb{R} est complet mais $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ne l'est pas.

Contre-exemple 9. *Fonction non continue qui transforme tout ouvert en un ouvert*

Reprenons la fonction du contre-exemple 2, et notons f l'application définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(\theta) = e^{i\theta}$.

f est une application continue et bijective de $[0, 2\pi[$ sur l'ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1, soit g sa bijection réciproque, elle applique \mathbb{U} sur $[0, 2\pi[$.

Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{U} , alors $g(\Omega) = f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $[0, 2\pi[$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue, g transforme donc tout ouvert en un ouvert.

Mais \mathbb{U} , comme fermé borné de \mathbb{C} (e.v.n de dimension finie) est compact, et de plus $g(\mathbb{U}) = [0, 2\pi[$. Or $[0, 2\pi[$ n'est pas une partie fermée de \mathbb{R} ce n'est donc pas un compact.

Il en résulte que g ne peut pas être continue.

Contre-exemple 10. *Fonction non continue qui transforme tout fermé en un fermé.*

Même contre-exemple que précédemment, ou plus simplement on peut considérer la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$ qui n'est pas continue, mais qui transforme tout fermé en l'un des ensembles $\{0\}$, $\{1\}$, ou $\{0; 1\}$, donc en un fermé.

Contre-exemple 11. *Fonction non continue qui transforme tout compact en un compact.*

Le deuxième contre-exemple précédent (la fonction indicatrice de $\{0\}$) convient.

Contre-exemple 12. *Fonction non continue qui transforme tout connexe en un connexe.*

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0, par contre elle transforme tout intervalle de \mathbb{R} en un intervalle, donc tout connexe de \mathbb{R} en un connexe.

Contre-exemple 13. *Fonction non continue qui transforme tout convexe en un convexe.*

Comme il y a identité des parties connexes et convexes sur \mathbb{R} le contre-exemple précédent convient.

Contre-exemple 14. *Fonction non continue qui transforme tout complet en un complet.*

Considérons la fonction f indicatrice du singleton $\{0\}$.

Cette fonction transforme toute partie complète de \mathbb{R} en $\{0\}$, $\{1\}$ ou $\{0, 1\}$.

Dans les trois cas f transforme une partie complète de \mathbb{R} en une partie fermée de \mathbb{R} donc en une partie complète, mais f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

Contre-exemple 15. *Fonction non continue dont l'image réciproque de tout connexe est un connexe.*

On considère la fonction f indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$, définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

f applique \mathbb{R} sur $\{0, 1\}$, et les seules parties connexes non vides de cet ensemble sont $\{0\}$ et $\{1\}$.

De plus $f^{-1}(\{0\}) =]-\infty, 0[$ qui est connexe ainsi que $f^{-1}(\{1\}) = [0, +\infty[$.

L'image réciproque par f de tout connexe est donc connexe, or f est discontinue en 0.

Contre-exemple 16. *Fonction non continue dont l'image réciproque de tout convexe est un convexe.*

Le contre exemple précédent convient.

Contre-exemple 17. *Fonction non continue telle que l'image réciproque de toute partie complète est une partie complète.*

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in]0, 1[\\ f(0) = f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Compte tenu de la définition de f , pour toute partie complète C incluse dans $]0, 1[$, on a soit $f^{-1}(C) = C$ soit $f^{-1}(C) = C \cup \{0, 1\}$ selon que $\frac{1}{2}$ soit ou ne soit pas dans C .

Dans les deux cas on obtient un fermé inclus dans $[0, 1]$ qui est complet.

$f^{-1}(C)$ est donc complet, or f n'est pas continue.

Contre-exemple 18. *Fonction non continue telle que l'image réciproque de toute partie compacte est une partie compacte.*

On reprend le contre-exemple 9.

L'image réciproque par g d'un compact de $[0, 2\pi[$ est identique à son image directe par f .

Or f est continue, elle transforme donc tout compact en un compact, ce qui implique que l'image réciproque par g de tout compact de $[0, 2\pi[$ est une partie compacte, or g n'est pas continue.

Contre-exemple 19. *Intersection non connexe de deux parties connexes.*

On considère dans \mathbb{R}^2 le cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 1 et l'axe (Ox) . Ces deux ensembles sont connexes. En effet (\mathcal{C}) est connexe comme image de l'intervalle $[0, 2\pi]$ de \mathbb{R} par la fonction continue $t \mapsto e^{it}$ et (Ox) est connexe comme partie convexe de \mathbb{R}^2 . Mais leur intersection $\{-1, 1\}$ ne l'est pas.

Contre-exemple 20. *Intersection infinie non ouverte de parties ouvertes.*

On considère la famille infinie $] -n, n[$ où n est un entier naturel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est une partie ouverte de \mathbb{R} , mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}] -n, n[= \{0\}$ n'est pas une partie ouverte de \mathbb{R} .

Contre-exemple 21. *Réunion non connexe de deux parties connexes.*

Il suffit de considérer la réunion de deux ouverts disjoints de \mathbb{R} . Cette réunion n'étant pas un intervalle, elle ne sera pas connexe.

Contre-exemple 22. *Réunion non convexe de deux parties convexes.*

Même exemple que précédemment.

Contre-exemple 23. *Réunion de deux s.e.v qui n'est pas un s.e.v.*

Considérons dans \mathbb{R}^2 deux vecteurs indépendants \vec{u} et \vec{v} ainsi que les s.e.v E et F qu'ils engendrent.

Alors $E \cup F$ n'est pas un s.e.v de \mathbb{R}^2 , en effet $\vec{u} + \vec{v} \notin E \cup F$, car si $\vec{u} + \vec{v} \in E$ on aurait $\vec{u} + \vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui entraînerait que $\vec{v} = (\lambda - 1)\vec{u}$ et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} seraient liés, ce qui est contraire à l'hypothèse, même chose si $\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Contre-exemple 24. *Union infinie non fermée de parties fermées.*

On considère dans \mathbb{R} la famille d'intervalles $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$ pour $n \neq 0$.

Ce sont tous des parties fermées de \mathbb{R} mais

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] =] -1, 1[$$

Qui n'est pas une partie fermée de \mathbb{R} .

Contre-exemple 25. *Union infinie non compacte de parties compactes.*

Même contre-exemple que précédemment, puisque tous les intervalles $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ sont compacts et que $] - 1, 1[$ ne l'est pas. On peut aussi considérer $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ on a alors \mathbb{R} qui n'est pas compact écrit sous la forme d'une union dénombrable de parties compactes.

Contre-exemple 26. *Union infinie non complète de parties complètes.*

Même premier contre-exemple que précédemment.

Les intervalles $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ étant fermés dans un espace complet sont tous des parties complètes de \mathbb{R} , mais leur réunion $] - 1, 1[$ est un ouvert de \mathbb{R} , ce n'est donc pas une partie complète de \mathbb{R} .

Contre-exemple 27. *Intérieur non connexe d'un connexe.*

Considérons les deux disques fermés $D_f(-1, 1)$ et $D_f(1, 1)$ de centre respectif $z_1 = -1$ et $z_2 = 1$ et de rayon 1, on notera $D_o(-1, 1)$ et $D_o(1, 1)$ les disques ouverts correspondants.

Ce sont deux parties convexes donc connexes de \mathbb{C} qui ne sont pas disjointes, leur réunion (E) est donc également une partie connexe.

Montrons que $\overset{\circ}{E} = D_o(-1, 1) \cup D_o(1, 1)$. On a, dans un premier temps $D_o(-1, 1) \cup D_o(1, 1) \subset \overset{\circ}{E}$.

Soit maintenant $z_0 \in \overset{\circ}{E}$, montrons que $z_0 \in D_o(-1, 1) \cup D_o(1, 1)$. Comme $\overset{\circ}{E} \subset E$ on a forcément $z_0 \in D_f(-1, 1)$ ou $z_0 \in D_f(1, 1)$. Or si z_0 appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1, alors quel-que-soit $r > 0$ au moins un des deux points $z_r = z_0 + ir$ ou $z'_r = z_0 - ir$ n'appartient pas à (E) , ce qui signifie que z_0 n'appartient pas à l'intérieur de (E) . Idem si l'on considère un point du cercle de centre -1 et de rayon 1. En conclusion, on a $z_0 \in D_o(-1, 1)$ ou $z_0 \in D_o(1, 1)$ et donc $\overset{\circ}{E} \subset D_o(-1, 1) \cup D_o(1, 1)$ soit $D_o(-1, 1) \cup D_o(1, 1) = \overset{\circ}{E}$.

$\overset{\circ}{E}$ s'écrit donc comme réunion disjointe de deux ouverts, il en résulte que $\overset{\circ}{E}$ n'est pas connexe.

Contre-exemple 28. *Somme non fermée de deux parties fermées.*

L'ensemble \mathbb{Z} est fermé dans \mathbb{R} comme complémentaire de l'union des ouverts $]p, p + 1[$ où $p \in \mathbb{Z}$. Il en est de même de l'ensemble des multiples de π noté $\pi\mathbb{Z}$.

D'autre part ces deux ensembles sont deux sous groupes additifs de \mathbb{R} , il en est donc de même de leur somme $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$.

Or ce sous groupe n'est pas discret, car cela impliquerait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ ce qui entraîne qu'il existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi = \alpha \cdot p_0$.

Mais alors, comme $1 = 1 + \pi \times 0 \in \mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ on aurait l'existence d'un $q_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = \alpha \cdot q_0$ soit $\alpha = \frac{1}{q_0}$ et donc $\pi = \frac{1}{q_0} \cdot p_0 = \frac{p_0}{q_0} \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible.

Le sous groupe $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est donc dense dans \mathbb{R} , ce n'est donc pas un fermé de \mathbb{R} .

Contre-exemple 29. *Somme non complète de deux parties complètes.*

\mathbb{R} étant complet les fermés \mathbb{Z} et $\pi\mathbb{Z}$ de l'exemple précédent sont complets, leur somme qui n'est pas fermée ne peut pas être complète.