

Problème 1 :Etude de la Cissoïde de Dioclés.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$, et on note (\mathcal{C}_1) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) unité 3cm.

- 1)
 - a) Déterminer le domaine de définition D_f de f
 - b) Pour $x \in D_f$ et $x \neq 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
 - c) Étudier la dérivabilité éventuelle de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 - d) Étudier la limite de f en 1 pour $x < 1$.Quelle conclusion peut-on faire ?
 - e) Dresser le tableau de variations de f .
- 2)
 - a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}_1) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$
 - b) Tracer (T) , (\mathcal{C}_1) et la courbe (\mathcal{C}_2) symétrique de (\mathcal{C}_1) par la symétrie d'axe (Ox) .
- 3) On pose $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$. Déterminer une équation cartésienne de (\mathcal{C}) .
 Cette courbe est appelée Cissoïde de Dioclés.

Partie B

On considère le point $I(\frac{1}{2}, 0)$, le cercle (Γ) de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$, la droite (Δ) tangente à (\mathcal{C}) au point $A(1, 0)$ et une droite variable (D) passant par O qui coupe (Γ) en P et (Δ) en Q. On cherche à déterminer l'ensemble (\mathcal{C}) des points M d'abscisse positive tels que $OM = PQ$ et tels que $M \in (D)$.

- 1) Soit M un point de (\mathcal{C}) distinct de O , on pose $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Exprimer OM en fonction de θ
- 2) En déduire une équation du lieu géométrique cherché.
- 3) Déterminer une construction à la règle et au compas de la courbe (\mathcal{C}) , construction que l'on effectuera en considérant trois positions distinctes de (D) .

Partie C

On considère la transformation plane F définie sur le plan privé de l'origine par :

$$F(M) = M' \text{ avec si } M \text{ a pour affixe } z, (z \neq 0) \text{ alors } M' \text{ a pour affixe } z' = \frac{1}{\bar{z}}.$$

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, x', y, y' sont quatre réels.

- 1) Déterminer l'expression analytique de F.
- 2) Déterminer l'équation de la courbe (\mathcal{P}) réunion de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, pour $x \geq 0$, et de sa symétrique par rapport à (Ox) .
- 3) Déterminer une équation de la courbe (\mathcal{C}) , image de la courbe (\mathcal{P}) par la transformation F.
- 4) Montrer que O, M, M' sont alignés et que $OM \times OM' = 1$.
- 5) En déduire une construction de (\mathcal{C}) .

Problème 2 :Etude d'applications vérifiant une condition de Holder.

Dans tout ce problème I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, f désigne une fonction numérique définie sur I.

S'il existe deux réels k et α positifs ou nuls tels que, pour tous x et y éléments de I :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$$

on dit que la fonction f possède sur I la propriété $\mathcal{H}(k, \alpha)$

A. Cas où $\alpha > 1$

1. On suppose que f possède la propriété $\mathcal{H}(k, 3)$ avec $k > 0$.

a) Soit x_0 un point de I .Déterminer la limite de $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$ quand x tend vers x_0 avec $x \in I$ et $x \neq x_0$

b) Montrer que f est dérivable en tout point de I et déterminer sa fonction dérivée f' .

2. Déterminer toutes les fonctions définies sur I et vérifiant sur I la propriété $\mathcal{H}(k, 3)$ avec $k > 0$

3. Étendre l'étude faite au cas où f possède sur I la propriété $\mathcal{H}(k, \alpha)$ avec $k > 0$ et $\alpha > 1$

B. Cas où $\alpha = 0$

1. On suppose que f possède la propriété $\mathcal{H}(k, 0)$.

a) Soit x_0 un élément de I. Montrer que, pour tout réel x de I, $|f(x)| \leq k + |f(x_0)|$

b) En déduire que f est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que, pour tout réel x de I ,on ait $|f(x)| \leq K$

2. Énoncer et établir une propriété réciproque de la propriété précédente.

C. Cas où $0 < \alpha \leq 1$

1. Etude d'un exemple. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{|x|}$

a) On suppose $0 \leq y \leq x$. Montrer que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$

b) Montrer que f possède sur \mathbb{R} la propriété $\mathcal{H}(1, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire que, pour tout réel x et y , $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

On distinguera à priori quatre cas selon les signes de x et de y .

2. Montrer que si la fonction f possède sur I la propriété $\mathcal{H}(k, \alpha)$ avec $0 < \alpha \leq 1$, alors f est continue sur I.

3. Dans cette question on prend pour I l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que f possède la propriété $\mathcal{H}(k, 1)$ avec $k > 0$ et que, de plus $|f(b) - f(a)| = k(b - a)$

a) Soit x_0 un nombre réel de l'intervalle $]a, b[$.

Montrer que l'hypothèse $|f(x_0) - f(a)| < k(x_0 - a)$ conduit à une contradiction.

Peut-on avoir $|f(b) - f(x_0)| < k(b - x_0)$?

b) Montrer que f est une fonction affine.