

Préparation au Capes interne

S. THOMAS

Nombres complexes

Exercice 1: Démontrer par récurrence la formule de Moivre.

On rappelle que si x et y sont deux réels :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ et } \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Exercice 2: Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

a) $3 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$

b) $e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{12}}$

d) $e^{i\frac{\pi}{12}}$; on pourra utiliser la question précédente

e) $\frac{3+i}{1-i}$

f) $\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Exercice 3: Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :

a) $1 + i$

b) $\sqrt{3} + 3i$

c) i

d) $\frac{1}{1-i}$

e) $1 + e^{i\varphi}$

Exercice 4: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 = i$

b) $z^2 + iz = 1$

c) $z^3 = i$

d) $z^4 = 1 + i$

e) $x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 5: calculer le plus simplement possible $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2005}$

Exercice 6: Déterminer l'ensemble des complexes tels que $|z + 2005i| = |z - 1967i|$

Exercice 7:

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
2. Même question avec l'égalité $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$

Exercice 8: L'objectif de l'exercice est d'exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

On pose $x = e^{2i\frac{\pi}{5}}$

1. Soit z un nombre complexe, montrer que si z est différent de 1 on a :

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

2. Montrer que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
3. On pose $T = x + \frac{1}{x}$, Montrer que T est solution d'une équation du second degré que l'on résoudra.
4. En déduire l'écriture de x sous forme algébrique
5. Exprimer à l'aide de radicaux $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 9: Soit x un réel, calculer $A(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $B = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

Indication : On peut s'intéresser à $A + iB$

Exercice 10: Linéariser $\cos^6 x$

Exercice 11: Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$