Nombres complexes—Interprétation(s) géométrique(s)

Rappel : Soient A,B,C,D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D, alors :

- L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$
- AB=$|z_A - z_B|$
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \arg \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ $[2\pi]$

Exercice 1:

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'argument d'un complexe soit égal à
   (a) 0 $[\pi]$
   (b) $\dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les affixes z_B, z_A, z_C pour que
   (a) A,B,C soient alignés
   (b) (AB)$\perp$(BC)
3. (a) Soit z de module 1, montrer que $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$
   (b) Soient a,b,c éléments de $\mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = |c| = 1$ $a \neq c$ et $c \neq b$.
   Montrer que $\arg \dfrac{c-b}{c-a} = \dfrac{1}{2} \arg \dfrac{b}{a}$ $[\pi]$
   (c) Interpréter géométriquement ce résultat
4. (a) Soient a,b,c,d éléments de $\mathbb{C}$ distincts tels que $\dfrac{d-a}{b-c}$ et $\dfrac{d-b}{c-a}$ soient imaginaires purs.
      i. Montrer que $\dfrac{d-c}{a-b}$ l'est aussi
      ii. Interpréter géométriquement le résultat

Exercice 2: Interpréter géométriquement les application suivantes. On précisera dans chaque cas les éléments caractéristiques de la transformation.

1. $z \longmapsto \bar{z}$
2. $z \longmapsto z + a$
3. $z \longmapsto e^{i\theta} z$
4. $z \longmapsto e^{i\theta} z + z_0$
5. $z \longmapsto \lambda z + z_0$ avec λ réel.

Exercice 3:

On appelle j le complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Soient A,B,C d'affixes respectives a,b,c

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
2. montrer que ABC est équilatéral de sens direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ (on pourra utiliser la question 3 de l'exercice précédent.