Exercice 1

1) Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que pour tout réel x on ait

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \text{ et } P(1) = 0$$

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,on a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = P(n+1)$$

3) En déduire que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4) En déduire la somme des carrées des 100 premiers entiers naturels non nuls.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$

1) Chercher deux racines évidentes de $P(x)$
2) En déduire une factorisation de $P(x)$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$

Exercice 3

On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
et on note $(\mathcal{C})$ sa représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}}\right)$ d'unité 1cm

1) Déterminer a et b tels que, pour tout $x \neq 1$ on ait : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$
2) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Montrer que le point $\Omega(1,1)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.
4) Donner les formules de changement de repère du repère $\left(O, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}}\right)$ au repère $\left(\Omega, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}}\right)$
5) Donner l'équation de $(\mathcal{C})$ dans ce nouveau repère et en déduire sa nature.
6) En utilisant le repère $\left(\Omega, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}}\right)$ tracer $(\mathcal{C})$.