

**Exercice 1** *Polynômes de Tchebychev (Pafnouti Lvovitch 1821-1894)*

On rappelle que  $\cos(2\theta)$  s'exprime en fonction de  $\cos \theta$ , par la formule  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$ .  
 On a donc  $\cos 2\theta = \mathcal{P}(\cos \theta)$  où  $\mathcal{P}$  est un polynôme de degré 2 défini par  $\mathcal{P}(x) = 2x^2 - 1$ .  
 On admet que, de même, pour tout entier naturel  $n$

$$\cos(n\theta) = \mathcal{T}_n(\cos \theta)$$

où  $\mathcal{T}_n$  est un polynôme de degré  $n$ , appelé polynôme de Tchebychev de rang  $n$ , ainsi

$$\mathcal{T}_1(x) = x \text{ et } \mathcal{T}_2(x) = 2x^2 - 1$$

- 1) Démontrer que si  $k \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors

$$\cos[(k+1)\theta] + \cos[(k-1)\theta] = 2 \cos(k\theta) \cdot \cos \theta$$

- 2) En déduire que, pour tout  $x$  réel,

$$\mathcal{T}_{k+1}(x) = 2x\mathcal{T}_k(x) - \mathcal{T}_{k-1}(x)$$

- 3) A l'aide de cette relation, déterminer les polynômes  $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$  et  $\mathcal{T}_5$ .

- 4) Résoudre  $\cos(4\theta) = 0$  puis  $\mathcal{T}_4(x) = 0$ , en déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\cos \frac{5\pi}{8}$ .

- 5) Procéder de même au rang 5, quels cosinus peut-on en déduire ?

**Exercice 2** *Résolution d'une équation du troisième degré*

Le but de cet exercice est de résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation du troisième degré d'inconnue  $x$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$

$$2 \cos 3x - 1 = 0$$

- b) Déterminer les mesures principales des solutions.

- 2) Calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$ .

- 3) Soit le polynôme  $f(X) = 8X^3 - 6X - 1$ .

Démontrer que les racines du polynôme  $f(X)$  sont

$$\cos \frac{\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9}$$

- 4) *On ne cherchera pas à calculer les racines de  $f$ .*

- a) Factoriser  $f(X)$

- b) Développer  $f(X)$

- c) En déduire les valeurs exactes de

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \cdot \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{5\pi}{9} \cdot \cos \frac{7\pi}{9}$$